



TITLE:

可換 $C^*\ast$ -環上の環準同型写像
の構造に関する一考察 : L.Molnarの
論文より(作用素の構造に関する作
用素論の最近の話題)

AUTHOR(S):

高橋, 眞映

CITATION:

高橋, 眞映. 可換 $C^*\ast$ -環上の環準同型写像の構造に関する一考察 : L.Molnarの論文より(作用素の構造に関する作用素論の最近の話題). 数理解析研究所講究録 1997, 979: 115-119

ISSUE DATE:

1997-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60848>

RIGHT:

可換 C^* -環上の環準同型写像の構造に関する一考察 (L. Molnar の論文より)

山形大学工学部 高橋真映 (Sin-Ei Takahasi)

我々の目的は、可換 C^* -環の環準同型像に関する L. Molnar の最近の結果を紹介し、更に彼の手法を用いて、可換 Banach 環から他の単純可換 Banach 環へのある種の環準同型写像の構造を考察することにある。

L. Molnar [2] は『 ρ が可換 C^* -環 A から他の可換 C^* -環 B への環準同型写像であるとき、その像 $\rho(A)$ が B の Gelfand 空間の点を強分離するような B の部分環を含むなら、 ρ は全射である』ことを示し、Gelfand 理論を用いて、『半単純可換 Banach 環が、可換 C^* -環の環準同型像であれば、すでにそれは C^* -同値である』ことを証明した。我々は彼の手法を用いて、可換 Banach 環から他の半単純可換 Banach 環へのある種の環準同型写像の構造を考察する。

A を Gelfand 空間 Φ_A を持つ可換 Banach 環、 B を Gelfand 空間 Φ_B を持つ半単純可換 Banach 環、 ρ を次の条件を満たす A から B への環準同型写像とする：

$$(*) \quad \rho(A)^\wedge(\psi) = C \quad (\forall \psi \in \Phi_B).$$

此処に " \wedge " は Gelfand 変換を表す。このとき我々は次のような ρ の構造定理を持つ：

Theorem. Suppose A is regular. Then there exist a continuous map $\hat{\rho}$ of Φ_B into Φ_A and a division $\{\Phi_B^0, \Phi_B^1, \Phi_B^2\}$ of Φ_B such that Φ_B^1 and Φ_B^2 are closed, and for each $a \in A$, $\rho(a)^\wedge = \hat{a} \circ \hat{\rho}$ on Φ_B^1 , $\rho(a)^\wedge = \hat{a} \circ \hat{\rho}$ on Φ_B^2 and $\rho(a)^\wedge(\psi) = \tau_\psi(\hat{a}(\hat{\rho}(\psi)))$ for every $\psi \in \Phi_B^0$ and for some discontinuous ring isomorphism τ_ψ of the complex field C onto itself.

Moreover, if ρ is surjective, then $\hat{\rho}$ is injective, and if A satisfies the following condition (#), then $\hat{\rho}(\Phi_B^0)$ is a finite set:

(#) For any $\lambda_n \in C$ with $|\lambda_n| \leq 1/2^n$ ($n = 1, 2, \dots$) and $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subseteq \Phi_A$ such that each φ_n is an isolated point in $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$, there exists an element $a \in A$ such that $\hat{a}(\varphi_n) = \lambda_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

注意：もし A が条件 (#) を満たす正則環で、 ρ が全射であれば、 Φ_B^0 は有限集合となり、従って Φ_B^1 及び Φ_B^2 は閉開集合となる。

定理を証明するにはいくつかの補題が必要である。我々は Molnar の手法を一部応用する。

Lemma 1. $\text{Ker}(\rho)$ is a closed algebra ideal of A .

証明. $\text{Ker}(\rho)$ の閉包から任意に元 a を選ぶと、

$$(1) \quad \rho(a)^\wedge(\psi) \rho(x)^\wedge(\psi) \neq 1 \quad (\forall \psi \in \Phi_B, \forall x \in A)$$

が成り立つ。実際任意の $x \in A$ に対して、 ax も $\text{Ker}(\rho)$ の閉包に属するから、

$$|ax - y| < 1 \text{ なる } y \in \text{Ker}(\rho) \text{ を選び、} z = \sum_{n=1}^{\infty} (ax - y)^n \text{ とおくと、} zax - zy = z - (ax - y)$$

が成り立つので、 $(\rho(z) + 1)\rho(a)\rho(x) = \rho(z)$ が従う。それ故望む (1) 式が得られる。そ

こでもし、 $\rho(a) \neq 0$ とすると、 B の半単純性から、 $\rho(a)^\wedge(\psi_0) \neq 0$ なる $\psi_0 \in \Phi_B$ が存在する。しかし (*) から $\rho(x_0)^\wedge(\psi_0) = \frac{1}{\rho(a)^\wedge(\psi_0)}$ なる $x_0 \in A$ を選ぶことができるので、

これは (1) 式に反する。それ故 $\text{Ker}(\rho)$ の閉性が示された。

次に $x \in \text{Ker}(\rho)$, $\lambda \in C$ とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n + i\beta_n = \lambda$ なる有理数の列 $\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots\}$ を選ぶと、

$$|\alpha_n x + i\beta_n x - \lambda x| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{ かつ } \alpha_n x, \beta_n x \in \text{Ker}(\rho) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

である。しかし $\rho(i\beta_n x)^2 = -\rho(\beta_n x)^2 = 0$ であるから、 B の半単純性より $\rho(i\beta_n x) = 0$ を得る。それ故 $\alpha_n x + i\beta_n x \in \text{Ker}(\rho) \quad (n = 1, 2, \dots)$ となり、このことと前半の事実から $\lambda x \in \text{Ker}(\rho)$ が導かれるため、 $\text{Ker}(\rho)$ が algebra ideal であることが示された。

証明終

Lemma 2. There exist a continuous map $\hat{\rho}$ of Φ_B into Φ_A such that

$$\rho(a)^\wedge(\psi) = \tau_\psi(\hat{\rho}(\psi)) \quad (a \in A)$$

for every $\psi \in \Phi_B$ and some ring isomorphism τ_ψ of C onto itself.

証明. $\psi \in \Phi_B$ を任意に固定する。このとき、 $\rho_\psi(a) = \rho(a)^\wedge(\psi) \quad (a \in A)$ で定義される ρ_ψ は (*) から A から C の上への環準同型写像となる。そこで、Lemma 1 で B を C , ρ を ρ_ψ と思うと、必然的に (*) が満たされ、従って $\text{Ker}(\rho_\psi)$ は A の閉 algebra ideal であり、 $A / \text{Ker}(\rho_\psi)$ と C は環同型となる。このようにして $A / \text{Ker}(\rho_\psi)$ は単位的可換 Banach 環となり、従って $A / \text{Ker}(\rho_\psi)$ から C の上への代数準同型写像 η が存在する。そこで、 A から $A / \text{Ker}(\rho_\psi)$ への標準写像と η の合成を φ とおくと、 $\varphi \in \Phi_A$ であり、 $\text{Ker}(\rho_\psi) \subseteq \text{Ker}(\varphi)$ となっている。しかし C は環としても単純であるから、 $\text{Ker}(\rho_\psi) = \text{Ker}(\varphi)$ でなければならない。勿論このような $\varphi \in \Phi_A$ は $\psi \in \Phi_B$ に対して唯一つであり、これを $\hat{\rho}(\psi)$ で表すことにする。以上を図で示すと、

$$C \cong A / \text{Ker}(\hat{\rho}(\psi)) = A / \text{Ker}(\rho_\psi) \cong C$$

$$\hat{a}(\hat{\rho}(\psi)) \leftrightarrow a + \text{Ker}(\hat{\rho}(\psi)) = a + \text{Ker}(\rho_\psi) \leftrightarrow \rho(a)^\wedge(\psi)$$

for each $a \in A$. ただし前者は代数同型、後者は環同型である。従って上の対応を τ_ψ と置けば欲しい結果を得る。証明終

Lemma 3. If A is regular, then $\hat{\rho}$ is continuous on Φ_B .

証明。 $\psi \in \Phi_B$ を任意に固定し、 $\{\psi_\lambda\}$ を ψ に収束する Φ_B のネット、 U を $\hat{\rho}(\psi)$ の任意の開近傍とする。従って A の正則性より、 $\hat{a}(\hat{\rho}(\psi)) = 1$, $\hat{a}|_{\Phi_A \setminus U} = 0$ を満たす $a \in A$ を選ぶことができる。それ故 Lemma 2 から

$$\lim_\lambda \tau_{\psi_\lambda}(\hat{a}(\hat{\rho}(\psi_\lambda))) = \lim_\lambda \rho(a)^\wedge(\psi_\lambda) = \rho(a)^\wedge(\psi) = \tau_\psi(\hat{a}(\hat{\rho}(\psi))) = \tau_\psi(1) = 1.$$

従ってある λ_0 が存在して、

$$\tau_{\psi_\lambda}(\hat{a}(\hat{\rho}(\psi_\lambda))) \neq 0, \text{ i. e., } \hat{a}(\hat{\rho}(\psi_\lambda)) \neq 0 \text{ and so } \hat{\rho}(\psi_\lambda) \in U \ (\forall \lambda \geq \lambda_0)$$

である。このことは $\lim_\lambda \hat{\rho}(\psi_\lambda) = \hat{\rho}(\psi)$ を意味し、 $\hat{\rho}$ は Φ_B 上で連続である。証明終

Lemma 4. If ρ is surjective, then $\hat{\rho}$ is injective.

証明。次の式を満たす $\psi_1, \psi_2 \in \Phi_B$ が存在したとする：

$$\psi_1 \neq \psi_2, \hat{\rho}(\psi_1) = \hat{\rho}(\psi_2) (= \varphi \in \Phi_A).$$

このとき $\rho(\text{Ker}(\varphi)) \subseteq \text{Ker}(\psi_1) \cap \text{Ker}(\psi_2)$ である。実際、 $\varphi(a) = 0$ とすると、 Lemma 2 から、

$$\rho(a)^\wedge(\psi_1) = \tau_{\psi_1}(\hat{a}(\hat{\rho}(\psi_1))) = \tau_{\psi_1}(\varphi(a)) = \tau_{\psi_1}(0) = 0$$

が成り立つから、 $\rho(\text{Ker}(\varphi)) \subseteq \text{Ker}(\psi_1)$ を得る。同様に $\rho(\text{Ker}(\varphi)) \subseteq \text{Ker}(\psi_2)$ も示される。一方 $\psi_1 \neq \psi_2$ であるから、 $\text{Ker}(\psi_1) \cap \text{Ker}(\psi_2) \subsetneq \text{Ker}(\psi_1)$, 従って上のことと併せて

$$(2) \quad \rho(\text{Ker}(\varphi)) \subsetneq \text{Ker}(\psi_1)$$

である。また

$$(3) \quad \text{Ker}(\rho) \subseteq \text{Ker}(\varphi)$$

である。実際、 $\rho(a) = 0$ とすると、 Lemma 2 から、

$$\varphi(a) = \hat{a}(\hat{\rho}(\psi_1)) = \tau_{\psi_1}^{-1}(\rho(a)^\wedge(\psi_1)) = \tau_{\psi_1}^{-1}(0) = 0$$

となるからである。それ故、

$$C \cong A / \text{Ker}(\varphi) \text{ (algebra iso.)}$$

$$\cong (A / \text{Ker}(\rho)) / (\text{Ker}(\varphi) / \text{Ker}(\rho)) \text{ (algebra iso.) (by (3))}$$

$$\cong B / \rho(\text{Ker}(\varphi)) \text{ (algebra iso.) (since } \rho \text{ is surjective)}$$

$$\supsetneq \text{Ker}(\psi_1) / \rho(\text{Ker}(\varphi))$$

$$\supsetneq \{0\} \text{ (by (2))}$$

となり、これは C が環としても単純であることに反する。証明終

定理の証明。次の3個の集合を考えよう：

$$\begin{aligned}\Phi_B^0 &= \{\psi \in \Phi_B : \tau_\psi \text{ is discontinuous}\}, \\ \Phi_B^1 &= \{\psi \in \Phi_B : \tau_\psi(\lambda) = \lambda \text{ for all } \lambda \in C\}, \\ \Phi_B^2 &= \{\psi \in \Phi_B : \tau_\psi(\lambda) = \bar{\lambda} \text{ for all } \lambda \in C\}.\end{aligned}$$

このとき

$$\Phi_B = \Phi_B^0 \cup \Phi_B^1 \cup \Phi_B^2 \text{ (disjoint union)}$$

であることをみることは易しい。また

『For each $a \in A$, $\rho(a)^\wedge = \hat{a} \circ \hat{\rho}$ on Φ_B^1 , $\rho(a)^\wedge = \bar{\hat{a}} \circ \hat{\rho}$ on Φ_B^2 and

$$\rho(a)^\wedge(\psi) = \tau_\psi(\hat{a}(\hat{\rho}(\psi)))$$

for every $\psi \in \Phi_B^0$ and for some discontinuous ring isomorphism τ_ψ of C onto itself』

であることも、3個の集合の定義と Lemma 2 から明らかである。

さて A は正則と仮定しよう。従って $\hat{\rho}$ は Lemma 3 より連続である。いま Φ_B^1 が閉であることを示す。 Φ_B^1 中のネット $\{\psi_\alpha\}$ が、ある $\psi \in \Phi_B$ に収束したとする。従って

$$\hat{a}(\hat{\rho}(\psi)) = \lim_\alpha \hat{a}(\hat{\rho}(\psi_\alpha)) = \lim_\alpha \rho(a)^\wedge(\psi_\alpha) = \rho(a)^\wedge(\psi) \quad (\forall a \in A)$$

であるから、

$$\tau_\psi(\rho(a)^\wedge(\psi)) = \tau_\psi(\hat{a}(\hat{\rho}(\psi))) = \rho(a)^\wedge(\psi) \quad (\forall a \in A)$$

が成り立ち、従って条件 (*) から $\tau_\psi(\lambda) = \lambda$ ($\forall \lambda \in C$) となり、 $\psi \in \Phi_B^1$ である。つまり Φ_B^1 が閉であることが分かる。同様に Φ_B^2 の閉性も示される。

最後に A が条件 (#) を満たすしよう。このとき $\hat{\rho}(\Phi_B^0)$ が有限集合であることを示す。今そうでなかったと仮定すると、 $\hat{\rho}(\Phi_B^0)$ 中の無限列 $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ を選んできて、各 φ_n が $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ のなかで孤立点であるようにできる。そこで

$$\varphi_n = \hat{\rho}(\psi_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となるように $\psi_n \in \Phi_B^0$ ($n = 1, 2, \dots$) を選んでおく。このとき、各 τ_{ψ_n} は C 上の不連続な自己同型写像であるから、それは C 中の任意の円板を C 中のある非有界な集合の上に移す (cf. [1, Theorem 2, p. 360])。それ故各自然数 n に対して、

$$|\lambda_n| \leq \frac{1}{2^n}, \quad |\tau_{\psi_n}(\lambda_n)| \geq n$$

となるようにできる。そこで条件 (#) から、 $\hat{a}(\varphi_n) = \lambda_n$ ($n = 1, 2, \dots$) となるように $a \in A$ を選べるから、

$$|\rho(a)^\wedge(\psi_n)| = |\tau_{\psi_n}(\hat{a}(\hat{\rho}(\psi_n)))| = |\tau_{\psi_n}(\hat{a}(\varphi_n))| = |\tau_{\psi_n}(\lambda_n)| \geq n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を得る。一方

$$|\rho(a)^\wedge(\psi_n)| \leq |\rho(a)| \quad (n = 1, 2, \dots)$$

であるから、これは矛盾する。証明終

問題。条件 (#) はどこまで緩められるであろうか？

参考文献

1. M. Kuczma, An Introduction to The Theory of Functional Equations and Inequalities, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1985.
2. L. Molnar, The range of a ring homomorphism from a commutative C^* -algebra, Proc. Amer. Math. Soc., 124(1996), 1789-1794.